6. ALGEBRAS DE BOOLE

6.1. Relaciones de orden

Relación de orden
Se llama **relación de orden** sobre un conjunto A a cualquier relación R entre sus elementos que verifica las siguientes tres propiedades:

1. Reflexiva: aRa, para cualquier $a \in A$.

2. Antisimétrica: si aRb y bRa, entonces $a = b$.

3. Transitiva: si aRb y bRc, entonces aRc.

El par (A, R), formado por un conjunto y una relación de orden definida sobre él, se llama **conjunto ordenado**.
Son conjuntos ordenados: $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{N}, \mid)$, $(D_a, \mid)$, ...
En el conjunto ordenado (A, R), dos elementos $a, b \in A$ se dicen **comparables** si aRb o bRa.
Cuando en el conjunto ordenado (A, R) dos elementos cualesquiera son siempre comparables, se dice que R es un **orden total**. En caso contrario se dice que R es un **orden parcial**.

Diagrama de Hasse
El **diagrama de Hasse** de un conjunto ordenado finito es una representación del mismo en la que cada elemento se representa por un punto del plano. Si aRb se dibuja a por debajo de b unidos por un segmento. Finalmente, se suprimen los segmentos redundantes por la propiedad transitiva: si aRb y aRc, se dejan los segmentos que unen a con b y b con c pero se suprime el segmento que une a con c.

Relaciones de orden sobre el conjunto producto
Si (A, R) y (B, S) son dos conjuntos ordenados, en el conjunto producto $A \times B$ se pueden definir dos relaciones de orden:

- **Orden producto**: $(a_1, b_1)P(a_2, b_2) \iff a_1 R\, a_2$ y $b_1 S\, b_2$
- **Orden lexicográfico**: $(a_1, b_1)L(a_2, b_2) \iff (a_1 \neq a_2$ y $a_1 R\, a_2)$ o $(a_1 = a_2$ y $b_1 S\, b_2)$

Elementos característicos en un conjunto ordenado
Sea $(A, \leq)$ un conjunto ordenado y $\emptyset \neq B \subset A$.

- $C \in A$ es **cota superior** de B si $b \leq C$ para todo $b \in B$.
- $S \in A$ es **supremo** de B si es cota superior y para cualquier otra cota superior C se cumple que $S \leq C$.
- $M \in B$ es **máximo** de B si $b \leq M$ para todo $b \in B$.
- $M_x \in B$ es **elemento maximal** si no existe $b \in B$, $b \neq M_x$, tal que $M_x \leq b$.
- $c \in A$ es **cota inferior** de B si $c \leq b$ para todo $b \in B$.
- $i \in A$ es **ínfimo** de B si es cota inferior y para cualquier otra cota inferior c se cumple que $c \leq i$.
- $m \in B$ es **mínimo** de B si $m \leq b$ para todo $b \in B$.
- $m_x \in B$ es **elemento minimal** si no existe $b \in B$, $b \neq m_x$, tal que $b \leq m_x$.
- Se dice que B está acotado si tiene cotas superiores e inferiores.

Existencia y unicidad
Sea $(A, \leq)$ un conjunto ordenado y $\emptyset \neq B \subset A$.

- Cuando existen, el máximo, supremo, mínimo e ínfimo de B son únicos.
- Si B es finito entonces tiene al menos un elemento maximal y otro minimal.

6. ALGEBRAS DE BOOLE

6.2. Retículos

Primera definición de retículo
Un **retículo** es un conjunto ordenado $(A, \leq)$ que verifica que para cada par de elementos $a, b \in A$ existen $\sup\{a, b\}$ e $\inf\{a, b\}$.
Son retículos: $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{N}, \mid)$, $(D_a, \mid)$ con $a \in \mathbb{N}$, $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, $(\{0,1\}, \leq)$ y $(\{0,1\}^n, \leq)$ con $n \in \mathbb{N}$.

Segunda definición de retículo
Un **retículo** es una terna $(A, \vee, \wedge)$ donde A es un conjunto y $\vee$ y $\wedge$ son dos operaciones binarias definidas sobre A y que cumplen las siguientes propiedades:

Idempotente:	$a \vee a = a$	$a \wedge a = a$	**Asociativa:**	$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$	$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$
Conmutativa:	$a \vee b = b \vee a$	$a \wedge b = b \wedge a$	**Absorción:**	$a \vee (b \wedge a) = a$	$a \wedge (b \vee a) = a$

Equivalencia entre las dos definiciones
Las dos definiciones son equivalentes en el sentido de que si un conjunto A es retículo con una definición lo es también con la otra siempre que la relación de orden y las operaciones binarias estén relacionadas de la siguiente manera:

$$a \leq b \iff a \vee b = b \quad \text{y} \quad a \wedge b = a$$

Tipos de retículos

- Se dice que el **retículo** $(A, \leq)$ es **acotado** si posee máximo y mínimo, que se designan por 1 y 0, respectivamente.
- Sea $(A, \leq)$ un retículo acotado. Dado $a \in A$, se dice que $a' \in A$ es **complementario** de a si $a \vee a' = 1$ y $a \wedge a' = 0$. Un **retículo** se dice **complementario** si todos sus elementos poseen complementario.
- Un **retículo** $(A, \vee, \wedge)$ se dice **distributivo** si para cualesquiera $a, b, c \in A$ se cumple que

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \qquad\qquad a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

Ejemplos de retículos

1. Los retículos $\mathcal{P}(X)$ y $\{0,1\}^n$ son complementarios y distributivos.

2. El retículo D_a es acotado y distributivo para cualquier valor de $a \in \mathbb{N}$.

3. El retículo D_a no es complementario para algunos valores de $a \in \mathbb{N}$ (por ejemplo, para $a = 12$).

4. El retículo D_a es complementario si y sólo si en la descomposición de a en factores primos, todos ellos aparecen con exponente unidad.

6. ALGEBRAS DE BOOLE

6.3. Álgebras de Boole

Álgebras de Boole
Un **álgebra de Boole** es un retículo complementario y distributivo (es decir, un retículo con las mismas propiedades que $\mathcal{P}(X)$ y $\{0,1\}^n$).
En el álgebra de Boole $(A, \vee, \wedge)$ se cumplen, además, las siguientes propiedades para cualesquiera $a, b \in A$:

Involutiva: $(a')' = a$ **Leyes de Morgan:** $(a \vee b)' = a' \wedge b'$ y $(a \wedge b)' = a' \vee b'$

Con frecuencia, en las álgebras de Boole las operaciones $\vee$ y $\wedge$ se representan también por $+$ y $\cdot$, respectivamente.

Isomorfismos entre álgebras de Boole
Dos álgebras de Boole son **isomorfas** si existe una biyección entre ellas que conserva la ordenación.

Teorema 1
Si A es un álgebra de Boole finita entonces existe un conjunto finito X tal que A y $\mathcal{P}(X)$ son isomorfas.

Teorema 2
Si X es un conjunto finito con n elementos, entonces las álgebras de Boole $\mathcal{P}(X)$ y $\{0,1\}^n$ son isomorfas.

Cardinal de un álgebra de Boole finita
Si A es un álgebra de Boole finita, entonces su cardinal es $|A| = 2^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

6. ALGEBRAS DE BOOLE

6.4. Funciones y expresiones booleanas

Álgebra de Boole binaria

Se llama álgebra de Boole binaria a $(\{0,1\}, \vee, \wedge) = (\{0,1\}, +, \cdot)$ con las operaciones definidas por:

$\vee$ / $+$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\wedge$ / $\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

$$\begin{cases} 0' = 1 \\ 1' = 0 \end{cases}$$

En el álgebra de Boole $(\{0,1\}^n, \vee, \wedge) = (\{0,1\}^n, +, \cdot)$ las operaciones vienen definidas por:

$$\begin{cases} x_1x_2\dots x_n \ + \ y_1y_2\dots y_n = (x_1+y_1)(x_2+y_2)\dots(x_n+y_n) \\ x_1x_2\dots x_n \ \cdot \ y_1y_2\dots y_n = (x_1\cdot y_1)(x_2\cdot y_2)\dots(x_n\cdot y_n) \end{cases} \qquad (x_1x_2\dots x_n)' = x_1'x_2'\dots x_n'$$

Variable booleana

Se llama **variable booleana** a cualquier variable x que puede tomar los valores 0 y 1.

Expresiones booleanas

El concepto de **expresión booleana** en las variables x_1, x_2, ..., x_n se define de forma recursiva como sigue:

1. Las variables x_1, x_2, ..., x_n son expresiones booleanas.
2. Los símbolos 0 y 1 son expresiones booleanas.
3. Si E_1 y E_2 son expresiones booleanas, entonces $E_1 \vee E_2 = E_1 + E_2$, $E_1 \wedge E_2 = E_1 \cdot E_2$ y E_1' son expresiones booleanas.
4. No hay más expresiones booleanas que las que se obtienen por las reglas 1, 2 y 3.

Definición

Una **función booleana** de n variables es una aplicación $f : \{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}$.
Para representar las funciones booleanas se utilizan tablas de verdad y expresiones booleanas.

Tablas de verdad

La **tabla de verdad** de una función booleana $f : \{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}$ es una tabla en la que se representan todos los elementos de $\{0,1\}^n$ y sus imágenes:

x_1	x_2	$\cdots$	x_{n-2}	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
0	0	$\cdots$	0	0	0	$f(0,0,\dots,0,0,0)$
0	0	$\cdots$	0	0	1	$f(0,0,\dots,0,0,1)$
0	0	$\cdots$	0	1	0	$f(0,0,\dots,0,1,0)$
0	0	$\cdots$	0	1	1	$f(0,0,\dots,0,1,1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	1	$\cdots$	1	1	1	$f(1,1,\dots,1,1,1)$

Funciones y expresiones booleanas

- Cualquier expresión booleana define una función booleana cuyas variables deben contener a todas las de la expresión.
  Así, por ejemplo, la expresión $x \wedge y \vee x'$, o mejor $xy + x'$, puede representar a una función booleana $f(x,y) = xy + x'$ o $f(x,y,z) = xy + x'$.

- Cualquier función booleana admite una expresión booleana, llamada **expresión elemental** que la representa:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{S(f)=\{b=b_1b_2\ldots b_n\,:\,f(b)=1\}} y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n \qquad \text{donde } y_i = \begin{cases} x_i & \text{, si } b_i = 1 \\ x_i' & \text{, si } b_i = 0 \end{cases}$$

  Cada $y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n$, con $y_i = x_i$ o $y_i = x_i'$, se llama **producto elemental**.

- Dos **expresiones booleanas** son **equivalentes** si definen la misma función booleana. Cualquier expresión booleana admite otra equivalente en forma de suma de productos elementales.

Ejercicios

1. Escribe la tabla de verdad de la función $f : \{0,1\}^2 \longrightarrow \{0,1\}$ definida por la expresión:

$$f(x,y) = (x \wedge y') \vee (y \wedge (x' \vee y))$$

2. Halla las tablas de verdad, y expresa como suma de productos elementales, cada una de las siguientes funciones booleanas:

(a) $f(x,y,z) = x \wedge y$ **(b)** $f(x,y,z) = z'$ **(c)** $f(x,y,z) = (x \wedge y) \vee z'$

3. Determina todas las funciones booleanas que cumplan: $f(a',b) = f(a,b') = (f(a,b))'$.

Soluciones y/o sugerencia a los ejercicios

1. f vale 1 sobre el conjunto $S(f) = \{01, 10, 11\}$ y 0 en el resto.
2. **(a)** $S(f) = \{110, 111\}$, $f(x,y,z) = xyz' + xyz$;
(b) $S(f) = \{000, 010, 100, 110\}$, $f(x,y,z) = x'y'z' + x'yz' + xy'z' + xyz'$;
(c) $S(f) = \{000, 010, 100, 110, 111\}$, $f(x,y,z) = x'y'z' + x'yz' + xy'z' + xyz' + xyz$.
3.

6. ALGEBRAS DE BOOLE

6.5. Simplificación de expresiones booleanas. Mapas de Karnaugh.

Simplificación de expresiones booleanas
Una función booleana se puede representar de muchas maneras mediante expresiones booleanas, e interesa encontrar la más simplificada. La expresión como suma de productos elementales no es la expresión más simple, pero sí es el punto de partida de todos los métodos de simplificación, que se basan en la búsqueda de pares de productos elementales que difieran solamente en una variable y poder aplicar el siguiente resultado.

Teorema
Si E es una expresión booleana en n variables y z es otra variable, entonces las expresiones E y $zE + z'E$ son equivalentes.

Los mapas de Karnaugh
Las expresiones booleanas elementales en $n = 2$, 3 y 4 variables admiten una representación en cuadrículas de 2^n cuadrados como las siguientes:

	y	y'
x		
x'		

n = 2

	y	y	y'	y'
x				
x'				
	z'	z	z	z'

n = 3

	y	y	y'	y'	
x					t'
x					t
x'					t
x'					t'
	z'	z	z	z'	

n = 4

Cada cuadrícula representa un producto elemental y dos productos elementales son adyacentes (sus cuadrados son adyacentes) si y sólo si difieren en una única variable (a efectos de adyacencia se identifican los lados opuestos de la cuadrícula).
El **mapa de Karnaugh** de una expresión booleana elemental en n (2, 3 o 4) variables es una cuadrícula como las anteriores en la que se han sombreado los cuadrados correspondientes a los productos elementales que aparecen en la expresión.
En el mapa de Karnaugh se llama **rectángulo simple** correspondiente a un producto de variables al rectángulo formado por todas las cuadrículas que contienen dicho producto. Así, por ejemplo en $n = 3$, el rectángulo simple correspondiente a x está formado por las cuadrículas xyz, xyz', $xy'z$ y $xy'z'$, y el rectángulo simple correspondiente a xz' está formado por las cuadrículas xyz' y $xy'z'$.

Simplificación basada en los mapas de Karnaugh
Para simplificar una expresión booleana elemental E se siguen los siguientes pasos:

1. Se representa el mapa de Karnaugh de E (sombreando las cuadrículas correspondientes a sus productos elementales).

2. Se consideran todos los rectángulos simples de mayor tamaño posible que recubran la zona sombreada del mapa de Karnaugh, aunque se solapen.

3. Se eliminan los rectángulos simples que están contenidos en la unión de otros, de forma que la zona sombreada quede recubierta por el **menor número de rectángulos del mayor tamaño posible**.

4. La suma de las expresiones correspondientes a los rectángulos que quedan al final del proceso es una expresión simplificada de la expresión original E.

La expresión simplificada depende de las elecciones efectuadas en el proceso, por lo que no es necesariamente única.

Ejercicios

1. Para cada uno de los siguientes mapas de Karnaugh de expresiones booleanas, escribe las expresiones booleanas elementales que definen, y simplifícalas.

	y	y	y'	y'
x			**X**	
x'	**X**	**X**	**X**	
	z'	z	z	z'

	y	y	y'	y'
x	**X**	**X**	**X**	
x'	**X**		**X**	
	z'	z	z	z'

	y	y	y'	y'
x			**X**	**X**
x'	**X**			**X**
	z'	z	z	z'

	y	y	y'	y'	
x	**X**		**X**	**X**	t'
x		**X**	**X**		t
x'		**X**	**X**		t
x'	**X**			**X**	t'
	z'	z	z	z'	

	y	y	y'	y'	
x	**X**		**X**	**X**	t'
x	**X**	**X**	**X**	**X**	t
x'		**X**			t
x'					t'
	z'	z	z	z'	

	y	y	y'	y'	
x			**X**	**X**	t'
x			**X**	**X**	t
x'	**X**		**X**	**X**	t
x'			**X**		t'
	z'	z	z	z'	

2. Simplifica la expresión de las funciones booleanas que toman el valor 1 en los conjuntos que se indican y el valor 0 en el resto:

$$S(f) = \{(1,1,0,0),(1,1,1,1),(1,0,1,1),(1,0,0,0),(0,0,0,1),(0,1,0,0),(0,0,0,0),(0,1,0,1)\}$$
$$S(g) = \{(0,0,0,1),(0,0,1,0),(0,1,0,0),(0,1,0,1),(0,1,1,1),(0,1,1,0),(1,1,0,0),(1,1,1,1),(1,0,1,0)\}$$

3. Se ha perdido parte de la información de la tabla de verdad de una función f, conservando únicamente los siguientes valores: $f(0,0,0) = f(0,1,0) = f(0,1,1) = f(1,1,0) = 1$ y $f(0,0,1) = 0$. Determina la expresión más sencilla que puede tener dicha función y dibuja su mapa de Karnaugh.

4. Dada la función booleana $f : \{0,1\}^4 \longrightarrow \{0,1\}$ definida por:

$$f(x,y,z,t) = xyzt + xy'zt + xyzt' + xy'zt' + x'y'z't' + x'yz't' + x'y'z't + x'yz't$$

(a) Demuestra, utilizando las propiedades de álgebra de Boole, que $f(x,y,z,t) = xz + x'z'$.
(b) Comprueba el resultado anterior usando mapas de Karnaugh.

5. Simplifica al máximo las siguientes expresiones booleanas:

(a) $(x'+y)' + y'z$ **(c)** $x(xy' + x'y + y'z)$ **(e)** $y(x+yz)'$
(b) $(x'y)'(x' + xyz')$ **(d)** $(x+y)'(xy')'$ **(f)** $(x+y'z)(y+z')$

Soluciones y/o sugerencia a los ejercicios
1. $f(x,y,z) = x'y + y'z$; $f(x,y,z) = xz + yz' + y'z$; $f(x,y,z) = xy' + x'z'$;
$f(x,y,z,t) = zt + z't' + xy't'$; $f(x,y,z,t) = xz' + xy' + yzt$; $f(x,y,z,t) = xy' + y'z + x'y't$.
2. $f(x,y,z,t) = x'z' + z't' + xzt$; $g(x,y,z,t) = x'y + yzt + y'zt' + xz't + yz't'$.
3. $f(x,y,z) = y + z'$.
4.
5. **(a)** $xy' + y'z$; **(b)** $xyz' + x'y'$; **(c)** xy'; **(d)** $x'y'$; **(e)** $x'yz'$; **(f)** $xy + xz'$.

6. ALGEBRAS DE BOOLE

6.6. El método de Quine-McCluskey.

El método de Quine-McCluskey
El método de Quine-McCluskey simplifica la expresión de una función booleana $f : \{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}$ agrupando sistemáticamente productos que difieren en una variable, pero en vez de utilizar productos elementales utiliza los elementos de $S(f) = \{b = b_1 b_2 \ldots b_n \in \{0,1\}^n : f(b) = 1\}$.
El proceso a seguir es el siguiente:

1. Se agrupan los elementos de $S(f)$ por bloques, en una columna, según el número de unos, y ordenados en orden decreciente.

2. Se compara cada elemento de cada bloque con todos los del siguiente bloque y, en caso de que difiera en un único dígito se marca y se pasa a una segunda columna sustituyendo por un guión el dígito diferente. Los elementos del último bloque se marcan sin comparar con ninguno.

3. Se repite el paso anterior con los bloques de la segunda columna construyendo una tercera columna, y así sucesivamente hasta que quede un único bloque.

4. Cuando no se pueda continuar con el proceso anterior:

- **(a)** Se consideran los elementos no marcados de todas las columnas.
- **(b)** Para cada elemento de $S(f)$ se elige uno de los no marcados que lo incluya, que contenga el mayor número de guiones, y repitiendo elección siempre que se pueda.

5. La expresión booleana formada por la suma de las expresiones correspondientes a los elementos elegidos es una expresión simplificada.

Ejemplo
Si $f(x,y,z,t) = xyz't + x'yzt + xyzt' + x'yz't + xy'zt' + x'yzt' + x'y'zt'$, entonces:

$$S(f) = \{1101, 0111, 1110, 0101, 1010, 0110, 0010\}$$

Se construyen los bloques y se realizan los pasos 2 y 3:

$$\begin{array}{ccccc} \star & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \star & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \star & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline \star & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \star & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \star & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline \star & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ccccc} & - & 1 & 0 & 1 \\ & 0 & 1 & - & 1 \\ & 0 & 1 & 1 & - \\ \star & 1 & - & 1 & 0 \\ \star & - & 1 & 1 & 0 \\ \hline \star & - & 0 & 1 & 0 \\ \star & 0 & - & 1 & 0 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{cccc} - & - & 1 & 0 \end{array}$$

Para hacer el paso 4 se construye la siguiente tabla:

	1101	0111	1110	0101	1010	0110	0010
--10			**X**		**X**	**X**	**X**
-101	**X**						
01-1		**X**		**X**			
011-		**X**				**X**	

En la tabla se observa que con los elementos --10, -101 y 01-1 se cubren todos los elementos de $S(f)$. Por tanto, la expresión simplificada de f es: $f(x,y,z,t) = zt' + yz't + x'yt$.

Ejercicios

1. Halla la expresión simplificada de la función $f : \{0,1\}^5 \longrightarrow \{0,1\}$ tal que

$$S(f) = \{11111, 11101, 11011, 10111, 10101, 10011, 11001, 10001\}$$

2. Encuentra la expresión más sencilla que detecta, dentro del conjunto $\{n \in \mathbb{Z} : 0 \leq n \leq 15\}$, los números que son: **(a)** múltiplos de 2; **(b)** múltiplos de 3; **(c)** múltiplos de 4.

3. Un examen tipo text consta de 5 preguntas. Las respuestas correctas son: $1 \to$ Si, $2 \to$ No, $3 \to$ Si, $4 \to$ Si y $5 \to$ No. Construye una expresión booleana que analice cada examen y distinga los aprobados de los suspensos (se considera aprobado si al menos tres respuestas son correctas).

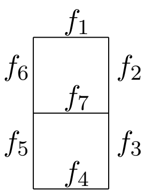
4. Define una expresión booleana que compare, según el orden $\leq$, dos números del conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$ y simplifícala.

5. Para evitar que un ascensor viajen niños pequeños solos y pesos excesivos, se quiere permitir su movimiento sólo cuando esté vacío o con un peso comprendido entre 25 y 300 kilos. con ese objetivo, se dota al ascensor con tres sensores: A sensible a cualquier peso, B sensible a pesos mayores de 25 kilos, y C sensible a pesos superiores a 300 kilos. Diseña el circuito más sencillo posible que cumpla dichas condiciones.

6. En una reunión celebrada entre 12 países de la Comunidad Europea se acuerda aceptar las resoluciones aprobadas por la mayoría de los miembros. España, Italia, Portugal y Grecia votan en bloque. Situación similar es la de Francia y Alemania. También hacen lo mismo Reino Unido e Irlanda por un lado, y Bélgica, Holanda y Luxemburgo por otro. Dinamarca siempre vota lo contrario que Alemania, y los tres países Bélgica, Holanda y Luxemburgo lo contrario que Irlanda. ¿Qué países tienen mayor poder de decisión?

7. Para evitar errores de transmisión en ciertos mensajes codificados, es frecuente añadir un bit, llamado control, a cada bloque de bits. Así, por ejemplo, en la representación de los números enteros positivos del 0 al 15 se añade a su código binario de cuatro dígitos un quinto dígito que será 1 o 0 según que el número de unos sea par o impar, respectivamente (por ejemplo el número 7 que en código binario es 0111 se representa por 01110). Define una función que proporcione el dígito de control y que sea lo más simplificada posible.

8. La aparición de un dígito decimal en el visor de una calculadora se produce mediante un circuito con cuatro entradas, que se corresponden con el código binario del dígito y siete salidas $\{f_i : 1 \leq i \leq 7\}$, que se representan como pequeños segmentos, iluminados o no en el visor, según el siguiente esquema:



(a) Construye la tabla de verdad de cada una de las funciones booleanas $f_i : \{0, 1\}^4 \longrightarrow \{0, 1\}$, $1 \leq i \leq 7$.

(b) Encuentra expresiones mínimas en forma de suma de productos para f_1 y f_2.

Soluciones y/o sugerencia a los ejercicios

1. $f(x, y, z, t, u) = xu$.

2. **(a)** $f(x, y, z, t) = t'$; **(b)** $f(x, y, z, t) = x'y'z't' + x'y'zt + x'yzt' + xy'z't + xyz't' + xyzt$;
(c) $f(x, y, z, t) = z't'$.

3. $f(x, y, z, t, u) = xzt + xzu' + xtu' + ztu' + xy'z + xy't + y'zt + y'zu' + xy'u' + y'tu'$.

4. $f(x, y, z, t) = x'y' + x't + x'z + y'z + zt$.

5. $f(a, b, c) = a'b'c' + abc'$.

6. España, Italia, Portugal y Grecia.

7. $f(x, y, z, t) = x'y'z't' + x'y'zt + x'yz't + x'yzt' + xy'z't + xy'zt' + xyz't' + xyzt$.

8. **(b)** $f_1(x, y, z, t) = x'zt + x'yt + xy'z' + x'y't'$; $f_2(x, y, z, t) = x'y' + y'z' + x'zt + x'z't'$.